Capitolo XII

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE NEL CAMPO REALE

1. Introduzione.

L'espressione "equazione differenziale" ha attualmente in Analisi un significato molto ampio. Anche restando nel campo dell'Analisi classica, non è molto facile darne una definizione precisa. Ci limiteremo quindi ad alcuni cenni qualitativi, rinviando a più tardi una definizione rigorosa, limitatamente a quelle equazioni di cui faremo una trattazione approfondita.
Grosso modo, si può dire che una equazione differenziale è un'equazione in cui compare necessariamente almeno una derivata di una funzione incognita $y(x)$. Si deve anche supporre che l'equazione non si riduca ad una identità. Esistono inoltre delle limitazioni che riguardano le operazioni da compiersi sulla funzione incognita e sulle sue derivate: per esempio, esse non devono comparire sotto segno di integrale, non devono essere soggette a traslazioni, ecc. Non sono, per esempio, equazioni differenziali le seguenti :

$$y'(x) = y(x) + \int_0^x xy^2(x)dx$$

$$y'(x) = y(x) + y(2x)$$

$$y'(x) = y(x+2) \quad .$$

Se $x \in R$ l'equazione differenziale è detta "ordinaria"; se $x \in R^n$ $(n > 1)$ l'equazione è detta "a derivate parziali": in essa compaiono infatti le derivate parziali della funzione incognita rispetto alle componenti del vettore x .

La funzione incognita $y(x)$ può, a sua volta, essere una funzione a valori in R oppure in R^m $(m>1)$; in quest'ultimo caso l'equazione differenziale sarà un'equazione vettoriale e cioè un sistema di m equazioni differenziali (scalari) in m funzioni incognite.
Osserviamo infine che le equazioni differenziali possono anche venire considerate nel campo complesso, cioè per valori complessi sia di x che di y ; noi non prenderemo però in considerazione questo caso.
Ordine di una equazione differenziale è il massimo ordine delle derivate della funzione incognita che in essa compaiono.
Integrare un'equazione differenziale significa, (in generale almeno) trovarne tutte le soluzioni. Tale problema si considera risolto quando il calcolo effettivo di tali soluzioni è ricondotto al calcolo di uno o più integrali indefiniti, cioè quando la determinazione effettiva delle soluzioni è, come si suol dire, "ricondotta alle quadrature".
Ad esempio, possiamo ritenere risolto il problema di integrare l'equazione differenziale

$$(1.1) \qquad \underline{y}' = \underline{f}(x)$$

$(f: R \to R^m$ $(m \geq 1)$ definita e continua in un intervallo A di R).
Infatti le soluzioni di tale equazione sono manifestamente tutte e sole le funzioni della forma

$$(1.2) \qquad \underline{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \underline{f}(x)dx + \underline{c} \quad (°) \qquad (x_0 \in A)$$

con $\underline{c}$ costante arbitraria se $m=1$, e vettore ad m componenti costanti arbitrarie se $m>1$.

2. Equazioni differenziali ordinarie del I ordine.

In questo e nei paragrafi seguenti, indicheremo con

(°) Ovviamente, $\int_{x_0}^{x} \underline{f} = (\int_{x_0}^{x} f_1, \dots, \int_{x_0}^{x} f_n)$.
Si osservi che $\| \int_{x_0}^{x} \underline{f} \| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x} |f_i| \leq n \int_{x_0}^{x} \| \underline{f} \|$.

A e B due intervalli, rispettivamente, di R e di R^n $(n \geq 1)$ e con $\underline{f}$ una funzione a valori in R^n definita e continua in $A \times B$.
Sia y una funzione a valori in B, definita, continua e differenziabile con continuità in un intervallo $I \subseteq A$. Diremo che y è soluzione dell'equazione differenziale (del primo ordine)

$$(2.1) \qquad \underline{y}' = \underline{f}(x,\underline{y})$$

se per ogni $x \in I$ risulta

$$\underline{y}'(x) = \underline{f}(x,\underline{y}(x)) \quad .$$

L'equazione differenziale (2.1) è "in forma normale", cioè risolta rispetto alla derivata prima. Se $n=1$ la (2.1) è un'equazione scalare. Se $n>1$ è un'equazione vettoriale, equivalente al sistema (differenziale del I ordine in forma normale) di n equazioni differenziali scalari nelle n componenti del vettore y

$$(2.2) \qquad \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \dots y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1 \dots y_n) \\ y_n' = f_n(x, y_1 \dots y_n) \end{cases} .$$

Chiediamoci ora: quante sono le soluzioni della (2.1)? Osserviamo che la (1.1) è un caso particolare della (2.1); la formula (1.2), che assegna tutte le soluzioni della (1.1) fa pensare che la equazione differenziale (2.1) abbia infinite soluzioni. Anzi, la (1.2) potrebbe addirittura fare presumere che ogni soluzione della (2.1) possa venire ricavata da una formula generale del tipo

$$(2.3) \qquad \underline{y} = \underline{y}(x,\underline{c})$$

(contenente una costante c arbitraria se $\underline{y}$ è a valori in R, oppure un vettore $\underline{c}$ ad m componenti costanti arbitrarie se $\underline{y}$ è a valori in R^m) assegnando a $\underline{c}$ un opportuno valore particolare.
In realtà, è talvolta possibile determinare una funzione del tipo (2.3) che soddisfi l'equazione (2.1) per ogni valore assegnato a $\underline{c}$: essa viene chiamata "integrale generale" della (2.1). Le funzioni $\underline{y}(x)$ che si ottengono dall'integrale generale assegnando a $\underline{c}$ valori particolari vengono

chiamate "integrali particolari" della (2.1).
Tuttavia, anche quando è possibile determinare l'integrale generale, può accadere che esistano soluzioni che non sono integrali particolari, che cioè non possono venire ottenute particolarizzando l'm-vettore arbitrario $\underline{c}$ che compare in (2.3). Queste soluzioni vengono chiamate "integrali singolari".
Per renderci conto della possibilità che esistano integrali singolari, conviene ricorrere alla rappresentazione geometrica della (2.1) e dei suoi integrali.
Consideriamo, per semplicità, il caso $m=1$. Ogni integrale della (2.1) ha come immagine nel piano cartesiano (x,y) una curva regolare, che viene chiamata "curva integrale" o anche "caratteristica" della (2.1).
L'equazione (2.1) definisce (nella regione di piano in cui è definita $f(x,y)$) un "campo di direzioni", cioè associa ad ogni punto (x,y) una "direzione" di coefficiente angolare $f(x,y)$. Evidentemente, una curva di equazione $y=y(x)$ è una caratteristica dell'equazione differenziale data se e solo se essa, in ogni suo punto, è tangente alla direzione del campo associata a quel punto.
Consideriamo l'integrale generale (2.3) della (2.1): esso può essere considerato come l'equazione di una famiglia semplicemente infinita di curve dipendenti dal parametro c.
Supponiamo che la famiglia di curve (2.3) abbia un inviluppo γ. Poichè per ogni punto di γ passa una curva della famiglia che ha ivi in comune con γ la retta tangente, la curva γ è una caratteristica della (2.1), che non è ottenibile da (2.3) particolarizzando la costante c: essa è quindi un integrale singolare.

Le considerazioni precedenti possono venire estese al caso $m>1$, con alcune modificazioni: lasciamo tale estensione al lettore.

3. Il problema delle condizioni iniziali.

Nelle applicazioni non viene, in generale, richiesta la determinazione di tutte le soluzioni di una equazione differenziale, ma soltanto di quelle fra esse che soddisfano certe ulteriori condizioni.

Tali condizioni possono essere di forme diverse: quelle più comuni sono le cosiddette "condizioni iniziali".
Il problema delle condizioni iniziali o "problema di Cauchy" può venire così formulato:
Sia $(x^\circ,\underline{y}^\circ)\in A\times B$: determinare le soluzioni di (2.1), definite in un intervallo I contenente x° e soddisfacenti la condizione $\underline{y}(x^\circ)=\underline{y}^\circ$. (°)
Schematicamente, tale problema viene indicato nel seguente modo:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \underline{y}'=\underline{f}(x,\underline{y}) \\ \underline{y}(x^\circ)=\underline{y}^\circ . \end{cases}$$

Qualora si conosca l'integrale generale di (2.1) è facile risolvere (almeno teoricamente) il problema (3.1). Abbiamo però già osservato che sono ben poche le equazioni per le quali è possibile determinare l'integrale generale. Occorre quindi assegnare delle condizioni sufficienti, il meno restrittive possibili, atte a garantire l'esistenza (ed eventualmente anche l'unicità) della soluzione del problema (3.1).
Inoltre conviene anche cercare un metodo generale che consenta di determinare la soluzione di (3.1), qualora ne sia garantita l'esistenza.
Il teorema delle contrazioni soddisfa ad entrambe le esigenze: infatti, utilizzandolo, potremo stabilire dei teoremi di esistenza e unicità "in grande" o "in piccolo", a seconda dei casi, per il problema (3.1) e l'uso del metodo delle approssimazioni successive ci permetterà, qualora siano soddisfatte le ipotesi di questi teoremi, di costruire effettivamente la soluzione cercata.
Per applicare il teorema delle contrazioni, conviene formulare il problema (3.1) in modo diverso, e precisamente sotto forma di equazione integrale. Sia $\underline{y}=\underline{y}(x)$ una funzione definita in un intervallo $I\subseteq A$ contenente x°, a valori in B e ta-

(°) Se A è chiuso a uno degli estremi, x° potrebbe anche essere uno degli estremi, per esempio l'estremo sinistro. In tal caso, la soluzione dovrebbe essere definita in un intervallo $[x^\circ,x^\circ+h)$, con $h>0$.

le che la funzione $\underline{f}(x,\underline{y}(x))$ (definita per ogni $x \in I$) sia integrabile in ogni intervallo $(x_o,x) \subset I$. Se per ogni x di I vale la eguaglianza

$$\underline{y}(x)=\underline{y}^o+\int_{x^o}^{x}\underline{f}(x,\underline{y}(x))dx, \tag{3.2}$$

diremo che $\underline{y}=\underline{y}(x)$ è soluzione dell'equazione integrale (del tipo di Volterra) (3.2). Vale il seguente

Teorema 3.1 - Il problema (3.1) è equivalente al problema di determinare le soluzioni continue del l'equazione integrale (3.2).

Infatti, sia $\underline{y}=\underline{y}(x)$ una soluzione continua di (3.2). Il secondo membro di (3.2) (per un noto teorema sulle funzioni integrali) è derivabile in ogni punto $x \in I$ con derivata eguale a $\underline{f}(x,y(\underline{x}))$. Pertanto risulta $\underline{y}'(x)=\underline{f}(x,\underline{y}(x))$ $\forall x \in I$. Essendo inoltre $\underline{y}(x^o)=\underline{y}^o$, la funzione $\underline{y}(x)$ è soluzione di (3.1).

Viceversa, sia $\underline{y}=\underline{y}(x)$ una soluzione di (3.1) definita in un intervallo $I \subseteq A$. Allora, $\underline{f}(x,\underline{y}(x))$ è continua in I (essendo funzione composta di due funzioni continue) e, come tale, integrabile in ogni intervallo (x_o,x), $x \in I$. La funzione integrale $\int_{x_o}^{x}\underline{f}(x,\underline{y}(x))dx$ e la funzione $\underline{y}(x)$ hanno (per la prima delle (3.1)) derivata eguale in ogni punto di I e quindi, come primitive di una stessa funzione continua, differiscono per un vettore costante. Risulta cioè :

$$\underline{y}(x)=\underline{c}+\int_{x_o}^{x}\underline{f}(x,\underline{y}(x))dx \quad . \tag{3.3}$$

Ponendo in (3.3) $x=x^o$ si ottiene $\underline{c}=\underline{y}^o$ e cioè la (3.2), c.d.d.

4. Teorema di esistenza e unicità "in grande".

Teorema 4.1- Sia A un intervallo di $\bar{R}^1$; $f: A\times\bar{R}^n \to \bar{R}^n$ continua e lipschitziana rispetto a $\underline{y}$ in R^n uniformemente rispetto a x in A (°). Allora, comunque si scelga $(x^o,\underline{y}^o) \in A\times R^n$, esiste una e una sola funzione $\underline{y}: A \to R^n$, soddisfacente in A l'equazione differenziale $\underline{y}'=\underline{f}(x,\underline{y})$ con la condizione iniziale $\underline{y}(x^o)=\underline{y}^o$.

Osservazioni - 1) Le ipotesi del teorema sono certamente soddisfatte se $\underline{f}$ è continua e possiede derivate parziali rispetto alle componenti del vettore $\underline{y}$ continue e limitate in $A\times R^n$. Basta infatti in tal caso ricordare il teorema 7.2 del Cap. II per ottenere (4.1).

2) Nella dimostrazione del teorema supporremo A compatto; se A non è compatto, basta osservare che il teorema vale per qualunque intervallo compatto contenuto in A, e quindi vale in A.

3) Dimostreremo il teorema nell'ipotesi che x_o sia l'estremo sinistro di A. Il caso in cui x_o sia l'estremo destro si riconduce immediatamente al precedente mediante il cambiamento di variabile $t=-x$. Se infine x_o è interno ad $A=[x_1,x_2]$ basta osservare che la dimostrazione fatta garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione $\underline{y}_1$ nell'intervallo $[x_1,x_o]$ e di una soluzione y_2 nell'intervallo $[x_o,x_2]$. La funzione $\underline{y}: A \to R^n$ definita da

$$\underline{y}(x) = \begin{cases} \underline{y}_1(x) & \forall x \in [x_1,x_o] \\ \underline{y}_2(x) & \forall x \in [x_o,x_2] \end{cases}$$

è allora l'unica soluzione del problema.

Dimostrazione - Sia $A=[x_o,x_o+a]$. Poniamo

$$\alpha = \min\left(a, \frac{1}{2K}\right) \tag{4.2}$$

(dove $K=nk$ e k è la costante di Lipschitz che compare in (4.1)). Sia A^* l'intervallo $[x_o,x_o+\alpha]$. Se $\underline{y} \in \mathscr{C}_{R^n}(A^*)$ la funzione $\underline{f}(x,\underline{y}(x))$ (continua in A^*) è integrabile in ogni intervallo $(x_o,x) \subseteq A^*$ e la funzione integrale è continua in A^*. Quindi l'operatore

(°) Cioè soddisfacente la condizione seguente: esiste k tale che, comunque si scelga x in A e comunque si scelgano $\underline{y}_1$ e $\underline{y}_2$ in R^n risulti :

$$\|\underline{f}(x,\underline{y}_1) - \underline{f}(x,\underline{y}_2)\| \le k\,\|\underline{y}_1-\underline{y}_2\| \quad . \tag{4.1}$$

Il teorema, come enunciato e dimostrato contiene approssimazioni inutili:
(1) $\| \int f \| \leq \int \| f \|$ e quindi si può sostituire a $\bar{K}$, k
(2) è sufficiente $k\alpha < 1$, cioè $\alpha < 1/k$

$$T: \underline{y} \to \underline{y}^\circ + \int_{x^\circ}^{x} \underline{f}(x, \underline{y}(x))dx \qquad (x \in A^*)$$

definisce un'applicazione di $\mathscr{C}_{R^n}(A^*)$ in sè.
Dimostriamo ora che T è una contrazione. Infatti

$$\| T(\underline{y}_1) - T(\underline{y}_2) \| = \left\| \int_{x^\circ}^{x} \{\underline{f}(x, \underline{y}_1(x)) - \underline{f}(x, \underline{y}_2(x))\}dx \right\|$$

$$= \operatorname*{Sup}_{x \in A^*} \left\| \int_{x^\circ}^{x} \{\underline{f}(x, \underline{y}_1(x)) - \underline{f}(x, \underline{y}_2(x))\}dx \right\|$$

$$\leq n \operatorname*{Sup}_{x \in A^*} \int_{x_\circ}^{x} \| \underline{f}(x, \underline{y}_1(x)) - \underline{f}(x, \underline{y}_2(x)) \| dx \quad (\bullet)$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{x \in A^*} \int_{x_\circ}^{x} K \| \underline{y}_1(x) - \underline{y}_2(x) \| dx$$

$$\leq \int_{x_\circ}^{x_\circ + \alpha} K \operatorname*{Sup}_{x \in A^*} \| \underline{y}_1(x) - \underline{y}_2(x) \| dx$$

$$\leq K\alpha \| \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \| \quad .$$

Essendo, per la (4.2), $K\alpha \leq \frac{1}{2}$, T è una contrazione. Poichè $\mathscr{C}_{R^n}(A^*)$ è uno spazio di Banach (teorema 5.1, cap.I), per il teorema delle contrazioni T ha uno e un solo punto unito, cioè esiste una e una sola soluzione continua dell'equazione

$$\underline{y}(x) = \underline{y}^\circ + \int_{x_\circ}^{x} \underline{f}(x, \underline{y}(x))dx$$

(e quindi anche, grazie al teorema 3.1, del sistema (3.1)) nell'intervallo $[x_\circ, x_\circ + \alpha]$.
Se $\alpha = a$ il teorema 4.1 è dimostrato.
Se $\alpha = \frac{1}{2K}$ proveremo che la soluzione $\underline{y}_1(x)$ di (3.1) di cui abbiamo ora dimostrato l'esistenza nell'intervallo $[x_\circ, x_\circ + \frac{1}{2K}]$ è <u>prolungabile</u> a tutto l'intervallo $[x_\circ, a]$. Infatti, posto $\underline{y}^1 = \underline{y}_1(x_\circ + \frac{1}{2K})$, assumiamo $(x^\circ + \frac{1}{2K}, \underline{y}^1)$ come nuovo punto iniziale. La dimostrazione precedente garantisce esistenza e unicità della soluzione $\underline{y}_2$ del problema

(•) Si veda la nota a pag. 206.

$$\begin{cases} \underline{y}' = f(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x^\circ + \frac{1}{2K}) = \underline{y}^1 \end{cases}$$

in un intervallo avente l'estremo sinistro nel punto $x^\circ + \frac{1}{2K}$ e di ampiezza almeno eguale a

$$\min(a - \frac{1}{2K}, \frac{1}{2K})$$

e cioè nell'intervallo $\left[x^\circ + \frac{1}{2K}, x^\circ + \alpha_1\right]$ con $\alpha_1 = \min(a, \frac{1}{K})$. La funzione

$$\underline{y} = \begin{cases} \underline{y}_1 & \text{se} \quad x^\circ \leq x \leq x^\circ + \frac{1}{2K} \\ \underline{y}_2 & \text{se} \quad x^\circ + \frac{1}{2K} \leq x \leq x^\circ + \alpha_1 \end{cases}$$

è l'unica soluzione del problema (3.1) nell'intervallo $(x^\circ, x^\circ + \alpha_1)$. Se $\alpha_1 = a$ il teorema è dimostrato. Se $\alpha_1 < a$, si itera il procedimento: con un numero finito di iterazioni (al più $[2aK]+1$) si perviene a prolungare la soluzione a tutto l'intervallo A.

5. <u>Teorema di esistenza e unicità "in piccolo"</u>.

<u>Teorema</u> 5.1- Sia $x^\circ \in R$, $\underline{y}^\circ \in R^n$ $(n \geq 1)$, $\underline{f}: R \times R^n \to R^n$ e sia possibile determinare due numeri reali positivi a e b tali che, posto

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x^\circ| \leq a \}$$

$$B = \{ \underline{y} \in R^n : |y_i - y_i^\circ| \leq b, \ (i = 1 \ldots n) \},$$

$\underline{f}$ sia continua in $A \times B$ e lipschitziana rispetto a $\underline{y}$ in B uniformemente rispetto a x in A. Allora esiste in un intorno di x° una e una sola soluzione dell'equazione differenziale $\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$ soddisfacente la condizione iniziale $\underline{y}(x^\circ) = \underline{y}^\circ$.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema il seguente

<u>Lemma</u> 5.1 - L'insieme $\mathscr{C}_B(A)$ delle funzioni conti

nue $\underline{f}:A\to B$ con la metrica dell'estremo superiore è uno spazio completo.

Infatti, sia $\{\underline{f}^{(m)}\}\in \mathscr{C}_B(A)$ una successione di Cauchy; $\{\underline{f}^{(m)}\}$ è una successione di Cauchy anche nello spazio di Banach $\mathscr{C}_{R^n}(A)$ e perciò converge uniformemente ad una funzione $\underline{f}$ continua. Dalla limitazione

$$\left| f_i^{(m)}(x) - y_i^o \right| \leq b$$

(valida per ogni x di A e per ogni $i=1,\dots,n$) si ricava, per $m\to+\infty$

$$\left| f_i(x) - y_i^o \right| \leq b \qquad \forall x\in A \wedge \forall i=1,\dots,n.$$

Quindi $\underline{f}$ è a valori in B e il Lemma è dimostrato.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema. Poniamo

$$(5.1) \qquad M = \mathrm{Sup} \left| f_i(x,\underline{y}) \right|$$

al variare di x in A, di $\underline{y}$ in B e di i fra 1 ed n. Sia

$$(5.2) \qquad \alpha = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2K})$$

(dove K è la costante di Lipschitz che compare in (4.1)) e sia A^* l'intervallo $[x^o-\alpha, x^o+\alpha]$. Se $\underline{y}\in\mathscr{C}_B(A^*)$, si dimostra, come nel teorema 4.1, che la funzione

$$\underline{u}(x)=\underline{y}^o+\int_{x^o}^{x}\underline{f}(x,\underline{y}(x))dx$$

è definita e continua in A^*. Essa è inoltre a valori in B : infatti per ogni $i=1,\dots,n$ risulta

$$\begin{aligned}\left|u_i(x)-y_i^o\right| &= \left|\int_{x^o}^{x} f_i(x,\underline{y}(x))dx\right| \\ &\leq \left|\int_{x_o}^{x}\left| f_i(x,\underline{y}(x))\right| dx\right| \\ &\leq M\alpha\leq b\end{aligned}$$

per la (5.2). Pertanto $\underline{y}\to\underline{u}$ definisce un'applicazione T di $\mathscr{C}_B(A^*)$ in sè.
Come nel teorema 4.1, si dimostra che T è una contrazione. Essendo $\mathscr{C}_B(A^*)$ uno spazio metrico completo (vedi Lemma 5.1), la contrazione T ha uno e un sol punto unito, cioè l'equazione integrale

$$\underline{y}(x) = \underline{y}^o+\int_{x^o}^{x}\underline{f}(x,\underline{y}(x))dx$$

ha in A^* una ed una sola soluzione continua. Dal teorema 3.1 segue allora la tesi.

6. Osservazioni complementari.

1) Supponiamo che le ipotesi del teorema 5.1 siano soddisfatte in un intervallo avente x^o come estremo sinistro (destro); allora vale un teorema analogo, ma l'esistenza e l'unicità della soluzione sono assicurate solo in un intorno destro (sinistro) di x^o.

2) Nelle ipotesi del teorema 5.1, la soluzione esiste ed è unica almeno nell'intervallo

$$A_1 = [x_o-\alpha_1, x_o+\alpha_1] \quad \text{con}$$

$$\alpha_1 = \min(a, \frac{b}{M}) \quad .$$

Infatti, la dimostrazione fatta garantisce esistenza e unicità della soluzione nell'intervallo $A^*=[x_o-\alpha, x_o+\alpha]$, con α assegnato da (5.2). Se $\alpha=\alpha_1$ l'affermazione è provata; se $\alpha<\alpha_1$, e cioè risulta $\alpha=\frac{1}{2K}$, si può dimostrare, con un metodo analogo a quello utilizzato nella dimostrazione del teorema 4.1, che la soluzione è prolungabile a tutto l'intervallo A_1(°).

3) Non è possibile invece assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione in tutto A.

(°) Occorrerà per questo tener presente che la soluzione $\underline{y}$ soddisfa la limitazione

$$\left| y_i(x_o\mp\alpha)-y_i^o \right| \leq \left|\int_{x_o}^{x_o\mp\alpha}\left| f_i(x,\underline{y}(x))\right| dx\right| \leq \frac{M}{2K}$$

per ogni $i=1,\dots,n$.

Come controesempio, si consideri nell'intervallo di $R^2 \; |x| \leq a, \; |y| \leq b$ con $a > \frac{b}{M}$, l'equazione $y' = M$.

Si assuma come punto iniziale l'origine: l'unica soluzione di questa equazione nulla nell'origine è $y = M\,x$, definita soltanto per $|x| \leq \frac{b}{M}$.

4) Anche se le condizioni del teorema 5.1 sono soddisfatte in un intorno di ogni punto $(x,\underline{y}) \in A \times R^n$, non è possibile assicurare che la soluzione locale del problema (3.1) sia prolungabile a tutto A.

Come controesempio, si consideri l'equazione $y' = xy^3$ (in $R \times R$) e si assuma come punto iniziale il punto $(0,1)$. In questo caso l'unica soluzione del problema (3.1) è la funzione $y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, definita solo per $|x|<1$.

5) Se in un intorno di $(x^\circ,\underline{y}^\circ)$ $\underline{f}$ è continua, ma non soddisfa la condizione di Lipschitz (4.1), un teorema, dovuto a G.Peano, garantisce ancora l'esistenza di una soluzione locale del problema (3.1). La soluzione può però non essere unica.

Come controesempio, si consideri l'equazione $y' = 2\sqrt{|y|}$. In qualunque intorno dell'origine, il secondo membro è continuo ma non lipschitziano e l'equazione data ammette almeno le due soluzioni $y=0$ e $y=x^2 \operatorname{sgn} x$, entrambe nulle nell'origine.

7. Equazioni di ordine n.

Sia $f: R^{n+1} \to R$ una funzione continua. Sia y una funzione reale definita in un intervallo $A \subseteq R$. Se $y \in \mathscr{C}^{(n)}(A)$ e per ogni x di A si ha

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

diremo che y è <u>soluzione dell'equazione differenziale di ordine n</u> (in forma normale)

$$(7.1) \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad .$$

Vale il

<u>Teorema</u> 7.1 - L'equazione (7.1) è equivalente al sistema normale di n equazioni differenziali del primo ordine

$$(7.2) \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Infatti, sia y una soluzione di (7.1). Posto

$$(7.3) \qquad y_1(x) = y(x) \quad y_2(x) = y'(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

la n-pla di funzioni così ottenute soddisfa (7.2). Viceversa, se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ è una n-pla di funzioni soluzione di (7.2), la funzione $y(x) = y_1(x)$ è di classe $\mathscr{C}^{(n)}$ e soddisfa (7.1).

Il sistema (7.2) può venire scritto sotto forma di equazione vettoriale nel modo seguente. Si ponga

$$(7.4) \qquad \begin{aligned} \underline{Y} &= (y_1, y_2, \dots y_n) \\ \underline{F} &= \underline{F}(x, \underline{Y}) = (y_2, y_3, \dots, y_n, f(x, \underline{Y})) \end{aligned} \quad .$$

Il sistema (7.2) diviene

$$(7.5) \qquad \underline{Y}' = \underline{F}(x, \underline{Y})$$

anch'essa equivalente a (7.1).
Vediamo ora che forma assume per la (7.1) il problema delle condizioni iniziali. Consideriamo la equazione equivalente (7.5). Per essa il problema di Cauchy consiste nel determinare una soluzione soddisfacente la condizione

$$\underline{Y}(x^\circ) = \underline{Y}^\circ$$

con $x^\circ \in R$, $\underline{Y}^\circ \in R^n$ assegnati. Ne segue che, tenendo presenti (7.4) e (7.3), il problema di Cauchy per la (7.1) può venire così formulato:

"Determinare una soluzione dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{n-1})$$

soddisfacente le <u>condizioni iniziali</u>

(7.6) $\quad y(x_o)=y_o \;,\; y'(x_o)=y'_o \;,\ldots,\; y^{(n-1)}(x_o)=y_o^{(n-1)}$

dove x_o, y_o, $y'_o,\ldots,y_o^{(n-1)}$, sono numeri reali assegnati".

Per ottenere teoremi di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy relativo a (7.1), osserviamo innanzi tutto che le prime n-1 componenti di $\underline{F}$ (indipendenti da f) sono continue e lipschitziane rispetto a $\underline{Y}$ in R^n uniformemente rispetto ad x in R (infatti le loro derivate parziali rispetto alle componenti di $\underline{Y}$ sono eguali a 1 o a 0). Dai teoremi 4.1 e 5.1 applicati a (7.5) si ricavano allora immediatamente i seguenti teoremi.

Teorema 7.2 - Sia A un intervallo di R^1; $f: A\times R^n \to R$ continua e lipschitziana rispetto a $\underline{Y}=(y,y'\ldots y^{(n-1)})$ in R^n uniformemente rispetto a x in A. Allora, comunque si scelgano x_o in A e $y_o,y'_o\ldots y_o^{(n-1)}$ in R, esiste una e una sola funzione reale y definita in A e soddisfacente ivi l'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f(x,y,y'\ldots y^{(n-1)})$$

e le condizioni iniziali

$$y(x_o)=y_o \;,\; y'(x_o)=y'_o\ldots y^{(n-1)}(x_o)=y_o^{(n-1)} \;.$$

Teorema 7.3 - Siano x_o, $y_o,y'_o\ldots y_o^{(n-1)} \in R$, $f: R\times R^n \to R$ e sia possibile determinare due numeri reali positivi a e b tali che, posto

$$A = \{ x\in R : |x-x_o| \leq a \}$$

$$B=\{\underline{Y}=(y,y'\ldots y^{(n-1)})\in R^n : |y-y_o| \leq b \;,$$

$$|y^{(i)}-y_o^{(i)}| \leq b \;,\quad i=1\ldots n-1\} \;,$$

f sia continua in $A\times B$ e lipschitziana rispetto a $\underline{Y}$ in B uniformemente rispetto a x in A. Allora esiste in un intorno di x_o una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f(x,y,y'\ldots y^{(n-1)})$$

soddisfacente le condizioni iniziali

$$y(x_o)=y_o ,\; y'(x_o)=y'_o \;,\ldots y^{(n-1)}(x_o)=y_o^{(n-1)} \quad .$$

8. Equazioni differenziali lineari.

Siano a_o, $a_1\ldots a_n$, b n+2 funzioni reali della variabile reale x definite in un intervallo A e sia $a_o(x)\neq 0 \;\; \forall x\in A$. L'equazione differenziale

(8.1) $$\sum_{i=o}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = b(x)$$

viene chiamata equazione differenziale lineare di ordine n. Se $b(x)=0 \;\; \forall x\in A$, l'equazione viene chiamata omogenea.
Poichè $a_o(x)\neq 0$ in A, è possibile scrivere l'equazione data nella forma normale:

(8.2) $$y^{(n)} = \frac{b(x)}{a_o(x)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x)}{a_o(x)}\, y^{(n-i)} \quad .$$

Sia $A^* \subseteq A$ un intervallo compatto in cui le funzioni $a_o,\ldots,a_n$, b siano continue; è facile verificare che il secondo membro di (8.2) soddisfa in $A^*\times R^n$ le condizioni del teorema 7.2. Pertanto, comunque si scelgano $y_o,y'_o\ldots y_o^{(n-1)}$ e x_o, esiste in A^* una e una sola soluzione della (8.1) soddisfacente le condizioni iniziali (7.6).
In altri termini, i "punti singolari" dell'equazione (8.1) (cioè i punti nei quali non vale il teorema di esistenza e unicità) sono i punti di discontinuità dei coefficienti $a_o,\ldots,a_n$, b e i punti nei quali a_o si annulla. Inoltre, le soluzioni di (8.1) non possono avere discontinuità se non nei punti singolari dell'equazione.
Poniamo ora

(8.3) $$\Lambda = \sum_{i=o}^{n} a_i(x) \frac{d^{(n-i)}}{dx^{n-i}} \quad .$$

L'operatore $\Lambda : \mathscr{C}^{(n)}(A) \to \mathscr{C}^{(o)}(A)$ è additivo ed omogeneo. Di conseguenza valgono i due teoremi seguenti.

Teorema 8.1 - La differenza di due integrali dell'equazione $\Lambda y=b$ è un integrale dell'equazione omogenea associata $\Lambda y=0$.

Teorema 8.2 - Qualunque combinazione lineare di integrali dell'equazione omogenea $\Lambda y=0$ è un integrale della stessa equazione.

9. Funzioni linearmente dipendenti.

Per procedere nello studio degli integrali di una equazione lineare, è necessario introdurre il concetto di funzioni linearmente dipendenti in un intervallo.
Siano $y_1, y_2 \dots y_n$ n funzioni reali della variabile reale x, definite in un intervallo A. Diremo che esse sono linearmente dipendenti in A quando esiste una n-pla di costanti $c_1, c_2 \dots c_n$ non tutte nulle tali che risulti

$$(9.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \qquad \forall x \in A \quad .$$

Se invece (9.1) è soddisfatta soltanto qualora si ponga $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, diremo che $y_1 \dots y_n$ sono linearmente indipendenti in A.
Se n=2, la relazione di dipendenza lineare equivale alla proporzionalità.
Vale il seguente

Teorema 9.1 - Le funzioni $y_1(x), \dots y_n(x)$ siano n-1 volte differenziabili in un intervallo A. Allora, condizione necessaria affinchè esse siano linearmente dipendenti in A è che il loro "determinante wronskiano"

$$W = W(x) = \det \left[y_i^{(k)} \right]_{\substack{i=1,2\dots n \\ k=0,1\dots n-1}}$$

sia identicamente nullo in A.

Infatti, se $y_1 \dots y_n$ sono linearmente dipendenti in A, vale (9.1) con $c_1 \dots c_n$ non tutte nulle. Derivando n-1 volte rispetto a x i due membri di (9.1) si ricava che il sistema lineare omogeneo di n equazioni nelle n incognite $c_1 \dots c_n$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(i)}(x) = 0 \qquad i=0,1\dots n-1$$

ammette una soluzione non banale per ogni $x \in A$. Di conseguenza, il determinante dei suoi coefficienti (e cioè $W(x)$) deve essere nullo.

Osservazioni - 1) Il teorema 9.1 assegna una condizione necessaria per la dipendenza lineare. Tale condizione non è, in generale, sufficiente(°); proveremo nel prossimo paragrafo che essa è sufficiente se $y_1 \dots y_n$ sono integrali di un'equazione lineare omogenea di ordine n.
2) Dal teorema 9.1 si deduce la seguente condizione sufficiente per l'indipendenza lineare:

Teorema 9.2 - Se $y_1(x), \dots y_n(x)$ sono n-1 volte differenziabili nell'intervallo A ed il loro determinante wronskiano non si annulla identicamente in A, allora esse sono linearmente indipendenti in A.

10. Dipendenza lineare di soluzioni di un'equazione lineare omogenea.

Siano $y_1(x) \dots y_k(x)$ $(k > 1)$ k integrali dell'equazione lineare omogenea di ordine n

$$(10.1) \qquad \Lambda y = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)} = 0$$

$(n \gtrless k)$ e sia A un intervallo in cui $a_o(x) \dots a_n(x)$ siano continue e $a_o(x) \neq 0$. Ci proponiamo di determinare condizioni necessarie e sufficienti per la dipendenza lineare di $y_1 \dots y_k$ in A. Ci sarà utile il seguente

(°) Come controesempio, basta considerare le due funzioni $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x|x|$ nell'intervallo $[-1,1]$.

Lemma 10.1 - Se $x_0 \in A$, l'unica soluzione di (10.1) soddisfacente in x_0 a condizioni iniziali tutte nulle, è la funzione identicamente nulla in A.

Infatti, è evidente che $y(x)=0 \quad \forall x \in A$ soddisfa (10.1) e le condizioni iniziali $y(x_0)=y'(x_0)=\ldots \ldots y^{(n-1)}(x_0)=0$. Inoltre per il teorema di esistenza e unicità, essa è l'unica soluzione del problema.

Vale il

Teorema 10.1 - Condizione necessaria e sufficiente affinchè k soluzioni $y_1(x)\ldots y_k(x)$ di (10.1) siano linearmente dipendenti in A è che esistano un punto $x_0 \in A$ e k costanti $c_1 \ldots c_k$ non tutte nulle tali che sia soddisfatto il sistema

$$(10.2) \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i y_i^{(j)}(x_0) = 0 \quad . \qquad (j=0,1,\ldots n-1)$$

La condizione è necessaria: infatti, se $y_1 \ldots y_k$ sono linearmente dipendenti, esistono $c_1,\ldots c_k$ non tutte nulle tali che risulti

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0 \qquad \forall x \in A$$

da cui, derivando i due membri, segue, per j=1... n-1

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i^{(j)}(x) = 0 \qquad \forall x \in A \quad .$$

Il sistema (10.2) è quindi soddisfatto per ogni $x \in A$.
La condizione è sufficiente. Infatti la funzione $y(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x)$ è, per il teorema 8.2, una soluzione di (10.1) soddisfacente condizioni iniziali in $x=x_0$ tutte nulle in forza di (10.2). Per il lemma 10.1 essa è allora identicamente nulla in A e cioè

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0 \qquad \forall x \in A$$

con $c_1 \ldots c_k$ costanti non tutte nulle, c.d.d.

Osservazione - Dalla dimostrazione del teorema si ricava che se il sistema (10.2) ha una soluzione non banale $c_1 \ldots c_k$ allora risulta anche

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i^{(j)}(x) = 0 \qquad \forall x \in A \; .$$

Consideriamo ora la matrice $\left[y_i^{(j)}(x) \right]_{\substack{i=1,2\ldots k \\ j=0,1\ldots n-1}}$

Chiameremo tale matrice matrice wronskiana delle k soluzioni di (10.1).
Dal teorema 10.1, ricordando un noto teorema di algebra lineare, si deduce il

Teorema 10.2 - Condizione necessaria e sufficiente affinchè k integrali di (10.1) siano linear - mente dipendenti in A è che esista un punto di A in cui la loro matrice wronskiana abbia caratteristica minore di k .

Dall'osservazione in calce al teorema 10.1 si ricava anche il

Lemma 10.2 - Se la matrice wronskiana di k soluzioni della (10.1) ha caratteristica minore di k in un punto A, essa ha caratteristica minore di k in ogni punto di A .

Siamo ora in grado di dimostrare facilmente il

Teorema 10.3 - La caratteristica della matrice wronskiana di k soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = 0$$

è costante in ogni intervallo A in cui $a_0 \ldots a_n$ sono continue e $a_0 \neq 0$: se tale caratteristica è p, allora p soluzioni fra le date sono linearmente indipendenti in A e le altre k-p dipendono linearmente da queste.

Infatti, sia x_o un punto qualunque di A e sia p la caratteristica della matrice wronskiana delle k soluzioni $y_1 \dots y_k$ nel punto x_o. Possiamo supporre che sia diverso da zero un minore estratto dalle prime p colonne. Allora, per il Lemma 10.2 la matrice wronskiana di $y_1 \dots y_p$ non può avere caratteristica minore di p nè maggiore di p in alcun punto di A, e quindi ha in A caratteristica costante. Inoltre, per il teorema 10.2, $y_1 \dots y_p$ sono linearmente indipendenti in A, mentre invece $y_1, \dots y_p, y_i$ $(i=p+1,\dots,k)$ sono linearmente dipendenti in A. Il teorema è quindi completamente dimostrato.
Nel caso particolare $k=n$ si ricava il

Corollario 10.1 - Condizione necessaria e sufficiente affinchè n integrali di (10.1) siano linearmente indipendenti in A è che il loro determinante wronskiano sia diverso da zero in un punto di A (e quindi in ogni punto di A).

Poichè la caratteristica della matrice wronskiana di un numero qualunque di integrali della (10.1) non può superare n, si ha anche il

Corollario 10.2 - L'equazione (10.1) non può avere più di n integrali linearmente indipendenti in A.

11. Integrazione delle equazioni lineari.

Dal corollario 10.2 si deduce immediatamente il

Teorema 11.1 - Se $y_1 \dots y_n$ sono n integrali linearmente indipendenti di un'equazione lineare omogenea di ordine n, ogni altro integrale dell'equazione ha la forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \quad . \tag{11.1}$$

con $c_1, \dots, c_n$ costanti opportune.

La (11.1) assegna quindi l'integrale generale dell'equazione. Poichè qualunque integrale può ottenersi da (11.1) assegnando a $c_1 \dots c_n$ valori particolari, le equazioni lineari omogenee non hanno integrali singolari.
Dai teoremi 11.1 e 8.1 si ricava il

Teorema 11.2 - Se y_o è un integrale di un'equazione lineare non omogenea di ordine n e $y_1 \dots y_n$ sono n integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata, ogni altro integrale dell'equazione non omogenea ha la forma

$$y(x) = y_o(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \tag{11.2}$$

con $c_1, \dots, c_n$ costanti opportune.

La (11.2) assegna quindi l'integrale generale dell'equazione. Anche le equazioni lineari non omogenee non hanno integrali singolari.

Il problema dell'integrazione delle equazioni lineari di ordine n viene così ricondotto a quello di determinare n integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata e un integrale particolare dell'equazione data (se essa non è omogenea).
Terminiamo con la seguente osservazione: la teoria delle equazioni differenziali lineari (che noi abbiamo svolto supponendo che sia i coefficienti delle equazioni sia la funzione incognita fossero funzioni reali della variabile reale x) rimane inalterata qualora si considerino funzioni a valori complessi della variabile reale x .

12. Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.

Nel caso di un'equazione della forma

$$\Lambda y = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0 \tag{12.1}$$

con $a_0, a_1 \dots a_n$ costanti reali o complesse, la ricerca di n integrali linearmente indipendenti è riconducibile alla risoluzione di un'equazione algebrica di grado n, nel modo seguente .

Sia $y = e^{\alpha x}$ (α costante complessa) . Allora :

$$\Lambda y = e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^{n-i} \quad .$$

Quindi $e^{\alpha x}$ è un integrale di (12.1) se e solo se α soddisfa l'equazione algebrica di grado n

$$(12.2) \qquad \varphi(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^{n-i} = 0 \quad .$$

che viene chiamata equazione caratteristica.
Siano $\alpha_1 \dots \alpha_m$ ($m \leq n$) m radici distinte di $\varphi(\alpha)=0$.
Il determinante

$$\det \left[\frac{d^i}{dx^i} e^{\alpha_j x} \right]_{\substack{i=0,1 \dots m-1 \\ j=1,2 \dots m}} =$$

$$= \det \left[\alpha_j^i \, e^{\alpha_j x} \right]_{\substack{i=0,1 \dots m-1 \\ j=1,2 \dots m}}$$

coincide, a meno del fattore $e^{(\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_m)x}$ con il determinante di Vandermonde degli m numeri $\alpha_1 \dots \alpha_m$ ed è quindi sempre diverso da zero.

La matrice wronskiana delle m soluzioni distinte $e^{\alpha_1 x}, \dots e^{\alpha_m x}$ ha perciò caratteristica m: tali soluzioni sono dunque linearmente indipendenti. Se m=n , abbiamo così determinato l'integrale generale della (12.1); vale quindi il

Teorema 12.1 - Se l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale (12.1) ha n radici distinte $\alpha_1, \dots \alpha_n$, l'integrale generale di (12.1) ha la forma seguente :

$$(12.3) \qquad y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$$

con $c_1, c_2, \dots, c_n$ costanti arbitrarie.

Supponiamo ora che le radici distinte dell'equazione caratteristica siano in numero minore di n e siano, precisamente, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ con molteplicità rispettivamente $n_1, \dots n_m$ ($n_1+\dots+n_m=n$). Consideriamo le n funzioni

$$(12.4) \qquad x^j e^{\alpha_i x} \qquad (i=1,\dots,m;\ j=0,\dots,n_i-1)$$

Verifichiamo che ciascuna di esse è un integrale di (12.1). Infatti

$$\Lambda(x^j e^{\alpha_i x}) = \Lambda \left[\frac{d^j e^{\alpha x}}{d\alpha^j} \right]_{\alpha=\alpha_i} = \left[\frac{d^j \Lambda(e^{\alpha x})}{d\alpha^j} \right]_{\alpha=\alpha_i} =$$

$$= \left[\frac{d^j (e^{\alpha x} \varphi(\alpha))}{d\alpha^j} \right]_{\alpha=\alpha_i}$$

$$= e^{\alpha_i x} \sum_{h=0}^{j} \binom{j}{h} x^h \varphi^{(j-h)}(\alpha_i) = 0$$

per $j=0,1\dots n_i-1$ perchè $\varphi(\alpha_i)=\varphi'(\alpha_i)=\dots = \varphi^{(n_i-1)}(\alpha_i) = 0$.

La n-pla di funzioni definita in (12.4) è costituita da funzioni linearmente indipendenti : se infatti esse fossero linearmente dipendenti in un intervallo A , sarebbero (per il teorema 10.3) linearmente dipendenti in R e questo è assurdo, perchè, comunque si scelgano i polinomi $P_1(x) \dots P_m(x)$, (purchè non tutti identicamente nulli) non può essere

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(x) e^{\alpha_i x} \to 0 \qquad \text{per} \quad x \to \pm\infty \quad .$$

Anche in questo caso quindi siamo in grado di scrivere l'integrale generale di (12.1); vale il seguente teorema (che contiene il teorema 12.1 come caso particolare):

Teorema 12.2 - Le radici dell'equazione caratteristica di (12.1) siano $\alpha_1, \dots \alpha_m$ di molteplicità rispettivamente, $n_1, \dots, n_m$ ($n_1+n_2+\dots+n_m=n$). Al-

lora l'integrale generale di (12.1) ha la forma seguente :

$$(12.5)\qquad y(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_i-1} c_{i,j} x^j e^{\alpha_i x}$$

con $c_{i,j}$ costanti arbitrarie.

Osserviamo che sia la (12.5), sia la 12.3 nel caso particolare in cui tutte le radici dell'equazione caratteristica sono distinte, assegnano lo integrale generale di (12.1) mediante funzioni in generale a valori complessi della variabile reale x, anche nel caso in cui i coefficienti di (12.1) siano tutti reali. In quest'ultimo caso è preferibile avere l'integrale generale in forma reale; cosa che si può ottenere facilmente come segue.
Se l'equazione caratteristica ha una radice complessa $\alpha = a+ib$, anche $\bar{\alpha} = a-ib$ è radice della stessa equazione e fra le (12.4) compaiono coppie di funzioni coniugate della forma

$$x^j e^{ax}(\cos b x \mp i \operatorname{sen} b x) .$$

La loro semisomma

$$x^j e^{ax} \cos b x \quad ,$$

e la loro semidifferenza divisa per i

$$x^j e^{ax} \operatorname{sen} b x$$

sono anch'esse integrali dell'equazione e possono venire sostituite rispettivamente a $x^j e^{\alpha x}$ e $x^j e^{\bar{\alpha} x}$ nell'espressione dell'integrale generale, che assume così forma reale.

13. <u>Il metodo di variazione delle costanti arbitrarie</u>.

Consideriamo un'equazione lineare <u>non</u> omogenea

$$(13.1)\qquad \Lambda y = b(x)$$

e supponiamo che sia noto l'integrale generale $\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ dell'equazione omogenea associata $\Lambda \bar{y} = 0$. Indicheremo ora un metodo che permette di determinare un integrale particolare della (13.1) e quindi (grazie al teorema 11.2) l'integrale generale di (13.1).
Sostituiamo, nell'integrale generale dell'equazione $\Lambda \bar{y} = 0$, al posto delle costanti $c_1 \dots c_n$, n funzioni arbitrarie $c_1(x), \dots c_n(x)$; sarà ovviamente possibile determinare $c_1(x), \dots c_n(x)$ in modo tale che la funzione

$$(13.2)\qquad y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$$

sia un integrale di (13.1). Anzi, avendo imposto così alle n funzioni c_i una sola condizione, potremo imporre ad esse di soddisfare anche ad altre $n-1$ condizioni, scelte a piacere, purchè non incompatibili. Noi sceglieremo queste condizioni in modo da rendere i calcoli necessari per determinare le c_i i più semplici possibili.

La derivata prima di (13.2) è

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) \quad .$$

Imponiamo allora, per semplificare i calcoli, che sia

$$(13.3)\qquad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0 \quad .$$

La derivata seconda di (13.2) diviene allora

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) .$$

Essa, colla condizione (analoga a (13.3))

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0 \ ,$$

si riduce a

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x) \quad .$$

Procediamo analogamente per le derivate successive fino all'ordine n-1. Le n-1 condizioni

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(j)}(x) = 0 \qquad j=0,1,..n-2$$

fanno sì che le derivate successive di $y(x)$ fino all'ordine n-1 incluso assumano la forma

$$y^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i^{(j)}(x) \quad .$$

Imponiamo ora a $y(x)$ di soddisfare la (13.1); essendo $y^{(n)}(x)= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i^{(n)}(x)+ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)$, sostituendo in (13.1) si ottiene la condizione:

$$\Lambda y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \Lambda y_i(x) + a_o(x) \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)=$$
$$= a_o(x) \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = b(x) \; .$$

Le derivate prime c_i' delle funzioni incognite c_i devono quindi soddisfare il sistema lineare non omogeneo :

$$(13.4) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(j)}(x)=0 & (j=0,1...n-2) \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)=\dfrac{b(x)}{a_o(x)} & . \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di questo sistema è il determinante wronskiano delle n funzioni y_i e quindi è diverso da zero. Il sistema (13.4) determina allora univocamente le funzioni c_i' .Da esse si risale alle c_i mediante una quadratura e ogni c_i risulta determinata a meno di una costante additiva k_i. Assegnando a k_i valori arbitrari si ottiene da (13.2) un integrale particolare della (13.1). Sostituendo invece in (13.2) l'espressione generale delle c_i ottenute, si ricava l'integrale generale della (13.1).
Con questo metodo, la determinazione di tale integrale generale è così ricondotta alla risoluzione di un sistema lineare e a una quadratura .

14. Alcuni esempi.

Diamo qui alcuni esempi di applicazione della teoria svolta nei n.11, 12 e 13 alla integrazione di particolari equazioni lineari.

1) $$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0 \quad .$$

E' un'equazione lineare omogenea (a coefficienti non costanti). Cerchiamo, per tentativi, due suoi integrali linearmente indipendenti. Cerchiamo, per esempio, se essa ammette integrali della forma

$$y = x^{\alpha} \qquad (\alpha \text{ costante}) .$$

Dovrebbe essere

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha}-4\alpha x^{\alpha}+4x^{\alpha} = x^{\alpha}(\alpha^2-5\alpha+4) = 0$$

e questo avviene se e solo se $\alpha = 4$ o $\alpha = 1$.
Le due funzioni

$$y = x^4 \quad , \quad y = x$$

sono quindi integrali particolari dell'equazione data. Poichè essi sono anche linearmente indipendenti (non sono proporzionali!), per il teorema 11.1 l'integrale generale dell'equazione data è

$$y(x) = c_1x^4 + c_2x \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti}) .$$

2) $$x^2y'' - 4xy' + 4y = 1 \quad .$$

E' un'equazione lineare non omogenea. L'equazione omogenea ad essa associata è l'equazione 1).
Per il teorema 11.2 il suo integrale generale ha quindi la forma

$$y(x) = c_1x^4 + c_2x + y_o(x)$$

dove y_o è un suo qualunque integrale particolare. Cerchiamone uno per tentativi: poichè il termine noto è una costante, proviamo a vedere se una funzione y della forma $y=a$ (costante) soddisfa la equazione. Perchè questo avvenga deve essere

$$4a - 1 = 0$$

cioè $a = 1/4$. L'integrale generale della 2) è quindi :

$$y(x) = c_1x^4 + c_2x + \frac{1}{4} \quad .$$

3) $$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad .$$

E' un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. La sua equazione caratteristica $\alpha^2-3\alpha+2=0$ ha le due radici distinte $\alpha=2$ e $\alpha=1$. Per il teorema 12.1 l'integrale generale è quindi

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{x} \quad .$$

4) $$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y^{(2)} = 0 \quad .$$

E' un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. La sua equazione caratteristica $\alpha^4-2\alpha^3+5\alpha^2 = 0$ ammette $\alpha=0$ come ra

dice doppia e $\alpha = 1 \mp 2i$ come radici semplici. Per il teorema 12.2 il suo integrale generale è

$$y(x)=c_1+c_2x+c_3e^{(1+2i)x}+c_4e^{(1-2i)x} .$$

che, ricordando l'osservazione alla fine del n.12, può essere scritto in forma reale nel modo seguente :

$$y(x)=c_1+c_2x+e^{x}(c_3\operatorname{sen} 2x+c_4\cos 2x) .$$

5) $$2y'' - y' = \frac{2(x+2)}{x^2} .$$

E' un'equazione lineare non omogenea.
L'equazione omogenea associata

$$2y'' - y' = 0$$

ha come equazione caratteristica $2\alpha^2 - \alpha = 0$ e quindi come integrale generale

$$y(x) = c_1 + c_2e^{\frac{1}{2}x} .$$

Usiamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie per determinare un integrale particolare della 5). Esso conduce a risolvere il sistema lineare nelle incognite c_1', c_2'

$$\begin{cases} c_1' + c_2'e^{\frac{1}{2}x} = 0 \\ c_2'\,e^{\frac{1}{2}x} = \dfrac{2(x+2)}{x^2} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$c_2 = \int e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx = -\frac{4}{x}\,e^{-\frac{1}{2}x} + K_2$$

$$c_1 = -\int\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx = -2\log|x| + \frac{4}{x} + K_1 .$$

Un integrale particolare della 5) è quindi

$$y(x) = -2\log|x|$$

ed il suo integrale generale è

$$y(x) = c_1 + c_2e^{\frac{1}{2}x} - 2\log|x| .$$